І ТУР ОЛІМПІАДИ З МАТЕМАТИКИ
КПІ ІМ. ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО

ІНСТИТУТ ПРИКЛАДНОГО СИСТЕМНОГО АНАЛІЗУ
ФАКУЛЬТЕТ ІНФОРМАТИКИ ТА ОБЧИСЛЮВАЛЬНОЇ ТЕХНІКИ
ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ
ФІЗИКО-ТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
2017 р.

Перший курс

1. Знайдіть остачу від ділення многочлена $(x-2)^{2017}+(x-1)^{2017}+1$ на многочлен x^2-3x+2.

2. Про квадратну матрицю A відомо, що $A^{2017}=O$. Доведіть, що матриця $A+E$ є оборотною. (Тут через O та E позначено нульову та одиничну матриці відповідно.)

3. Побудуйте графік функції

$$f(x)=x^2\cdot\lim_{n\to\infty}2^{-n}(\cos\tfrac{x}{2}+1)(\cos\tfrac{x}{4}+1)\cdot\ldots\cdot(\cos\tfrac{x}{2^n}+1),\qquad x\in\mathbb{R}.$$

4. Нехай n — фіксоване натуральне число. Для кожного впорядкованого набору дійсних чисел $(x_1,\ldots,x_n)$ будемо називати його a-зсувом заміну цього набору на $\big(|x_1-a|,\ldots,|x_n-a|\big)$. Доведіть, що до будь-якого початкового набору можна застосувати таку послідовність з n a-зсувів (можливо, з різними a), що в результаті утвориться набір $(0,\ldots,0)$.

5. Функцію $f\colon[0,1]\to\mathbb{R}$ задано формулою

$$f(x)=\begin{cases}1, & \text{при } x=0,\\ x, & \text{при } x\in(0,1),\\ 0, & \text{при } x=1.\end{cases}$$

   Чи існує така функція $g\colon[0,1]\to[0,1]$, що $g(g(x))=f(x)$ для всіх x? Якщо так, наведіть приклад такої функції; якщо ні — доведіть це.

6. Назвемо набір з нулів та одиниць *правильним*, якщо в ньому кожна група з послідовних нулів має парну довжину, а кожна група з послідовних одиниць — непарну. Наприклад, набори 001000011100 та 111110010000 є правильними, а набір 111001111101 — неправильним. Скільки існує правильних наборів довжини 17?

Розбір завдань I туру олімпіади відбудеться на засіданні математичного гуртка.
Деталі на https://www.facebook.com/groups/math.olymp.kpi/

Результати олімпіади будуть опубліковані на сайті http://matan.kpi.ua/

І ТУР ОЛІМПІАДИ З МАТЕМАТИКИ
КПІ ІМ. ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО

ІНСТИТУТ ПРИКЛАДНОГО СИСТЕМНОГО АНАЛІЗУ
ФАКУЛЬТЕТ ІНФОРМАТИКИ ТА ОБЧИСЛЮВАЛЬНОЇ ТЕХНІКИ
ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ
ФІЗИКО-ТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
2017 р.

Старші курси

1. Числову послідовність $(x_n, n \in \mathbb{N})$ задано співвідношенням
$$(1+1/n)^{n+x_n} = e, \qquad n \geq 1.$$
Знайдіть $\lim_{n\to\infty} x_n$.

2. Розвиньте функцію
$$f(x) = \frac{1}{x^4+x^3+x^2+x+1}, \qquad x \in \mathbb{R},$$
у ряд Маклорена та вкажіть його область збіжності.

3. Нехай
$$F(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t}, \qquad x \in (1, +\infty).$$
Обчисліть границю $\lim_{x\to 1+0} F(x)$.

4. Нехай i, як завжди, позначає уявну одиницю. Скільки існує таких пар $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, для яких $(a+ib)^{2017} = (a-ib)^{2018}$?

5. Для яких $\alpha \in \mathbb{R}$ існує така *неперервна* функція $g\colon (0, +\infty) \to (0, +\infty)$, що $g(g(x)) = x^\alpha$ для всіх x? Відповідь обґрунтуйте (наведіть приклад такої функції для тих значень α, для яких це можливо, та доведіть її неіснування у протилежному випадку).

6. Безсмертна Маша записує на нескінченній дошці цифри з множини $\{0, 1, \ldots, 9\}$, обираючи кожну наступну цифру навмання незалежно від попередніх. Маша припиняє цей процес в той момент, коли число, утворене з *усіх* написаних на дошці цифр, стає повним квадратом. (Наприклад, Маша зупиняється, написавши 3 8 3 7 6 8 1, оскільки $3\,837\,681 = 1\,959 \times 1\,959$.) Позначимо через p ймовірність того, що Маша буде писати цифри вічно. Доведіть, що $p > \frac{1}{2}$.

Розбір завдань І туру олімпіади відбудеться на засіданні математичного гуртка.
Деталі на https://www.facebook.com/groups/math.olymp.kpi/

Результати олімпіади будуть опубліковані на сайті http://matan.kpi.ua/